Analiza matematyczna I
Lista 4 (badanie przebiegu zmienności funkcji)

Zad 1. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, na przedziale $x \in [-2, 2]$,

b) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, na przedziale $x \in [-1, 2]$,

c) $y = \sqrt{100 - x^2}$, na przedziale $x \in [-6, 8]$,

d) $y = \frac{x-1}{x+1}$ na przedziale $x \in [0, 4]$,

e) $y = \sqrt[3]{x^2}$ na prostej $\mathbb{R}$, f) $y = \operatorname{arctg}(x^2)$ na prostej $\mathbb{R}$.

Zad 2. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia wykresów funkcji

$$a)\quad y = -x^4 - 2x^3 + 36x^2 + x + 5, \qquad b)\quad y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2,$$

$$c)\quad y = \frac{x^3}{x^2+48}, \qquad d)\quad y = 1 - \sqrt[3]{x-1}, \qquad e)\quad y = e^{\operatorname{arctg} x}, \qquad f)\quad y = \frac{1}{(x+1)^3},$$

$$g)\quad y = x^4(12\ln x - 7), \qquad h)\quad y = \arcsin\frac{1}{x}, \qquad i)\quad f(x) = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}.$$

Zad 3. Wyznaczyć asymptoty wykresów funkcji

$$a)\quad y = \frac{\sin x}{x}, \qquad ,b)\quad y = \frac{1}{1-x^2}, \qquad c)\quad y = \frac{3-x^2}{2-x}, \qquad d)\quad y = \frac{2x^2-1}{x^2},$$

$$e)\quad y = \frac{x^4}{2-x^3}, \qquad f)\quad y = \frac{2x^3}{(x-1)^2}, \qquad g)\quad y = \frac{1}{x^2-5x+6}, \qquad h)\quad y = e^{\frac{1}{x}} - x,$$

$$u)\quad y = x - 2\operatorname{arctg} x, \qquad j)\quad y = x + 3\operatorname{arcctg} x, \qquad k)\quad y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4.$$

Zad 4. Przeprowadzić wszechstronne badanie funkcji i wykonać ich wykresy:

$$a(x) = x^3 - 3x^2 + 4, \qquad b(x) = e^{-x^2}, \qquad c(x) = \frac{x}{1-x^2}, \qquad d(x) = \frac{x}{e^x},$$

$$e(x) = \frac{x^2+1}{x^2}, \qquad f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{x+1}, \qquad h(x) = \frac{x^2}{x^2-1},$$

$$i(x) = x\operatorname{arctg} x, \qquad j(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, \qquad k(x) = \frac{e^x}{x}, \qquad l(x) = \ln(x^2+1),$$

$$m(x) = (x-3)\sqrt{x}, \qquad n(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad o(x) = x - \ln(x+1), \qquad p(x) = x\frac{x-3}{x+1},$$

$$r(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}, \qquad s(x) = x\ln x, \qquad t(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}, \qquad u(x) = 3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$$

$$v(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ funkcja gęstości rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej μ i odchyleniu standardowym $\sigma > 0$

$$x(t) = t2^{\frac{1}{t}}, \qquad y(x) = \sin x - \sin^2 x, \qquad z(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$$